Métodos Estocásticos em Economia e Finanças

01/2025 - 02/2025 - 01/2026
(Graduação e pós-graduação)
Professor Rodrigo Peñaloza
Universidade de Brasília

O curso é uma sequência de três matérias consecutivas que abarcam três áreas da matemática: Teoria da Medida e Integração; Teoria da Probabilidade; Cálculo Estocástico. Os dois primeiros cursos formam uma única disciplina dividida em dois semestres. Nelas cobrimos o livro de Patrick Billingsley, *Probability and Measure*, em que a Teoria da Medida e a Teoria da Probabilidade são apresentadas de forma entrelaçada. Portanto, o aluno que decidir cursar o 1º curso deve ter em mente cursar também o 2º. Já o 3º curso pode ser cursado separadamente, desde que o aluno domine teoria da medida e a teoria da probabilidade à la Kolmogorov. Caso não domine, recomenda-se fortemente cursar os dois primeiros. O livro adotado no 3º curso é o de Michael Steele, *Stochastic Calculus and Financial Applications.* Este curso de pós-graduação é conjunto com a graduação. Em cada semestre haverá uma matéria da graduação associada a cada um dos 3 cursos. No período 01/2025 essa matéria é ***Métodos Matemáticos em Ciências Sociais Avançados***. Nos próximos semestres serão anunciadas as correspondentes matérias.

O pré-requisito é um conhecimento mediano de Análise Real, especialmente conceitos topológicos e de convergência. Em sala, o professor apresentará todos os resultados e abrirá todas as demonstrações. Cada curso terá uma prova do tipo *take-home*. Depois dos três cursos, o aluno estará apto para enveredar pela área de finanças matemáticas, séries temporais, econometria avançada, macrodinâmica ou outras áreas da matemática aplicada e da economia matemática.

Métodos Estocásticos em Economia e Finanças, 1 (1º semestre de 2025)

Pós-graduação: ECO 304301 Métodos Estocásticos em Economia e Finanças 1 (4 créditos)
Graduação: ECO 0236 Métodos Matemáticos em Ciências Sociais Avançados (4 créditos)
Horário: SEG: 14:00-16:00h e QUA: 14:00-16:00h.

1. Teorema dos números normais de Borel: expansão diádica, leis forte e fraca dos grandes números.
2. Medidas de probabilidade: classes de subconjuntos, medidas de probabilidade, medida de Lebesgue, existência e extensão de medidas, teorema π-λ de Dynkin, teorema da classe monótona de Halmos.
3. Probabilidades denumeráveis: limites superior e inferior de sequência de eventos, eventos independentes, sub-σ-álgebras, lemas de Borel-Cantelli, lei 0-1 de Kolmogorov.
4. Variáveis aleatórias simples: definição, independência, existência de sequências independentes para sequências de medidas, valor esperado, desigualdades de Markov, Tchebyshev, Hölder e Liapunov, leis forte e fraca dos grandes números.
5. Medida: medidas gerais, medida externa, extensão de medidas, medida de Lebesgue em espaços euclidianos, funções mensuráveis, transformação de medidas, funções de distribuição, convergência fraca.
6. Integração: definição, desigualdades, densidades, mudança de variáveis, integrabilidade uniforme, integral de Lebesgue, integral de Riemann, teorema fundamental do Cálculo, medida-produto, teorema de Fubini, espaços L^p.

Bibliografia

Billingsley, Patrick (1986): *Probability and Measure*, 3ª edição, capítulos 1, 2 e 3. Mais precisamente, seções 1 a 19, menos as seções 7, 8 e 9.

Métodos Estocásticos em Economia e Finanças, 2 (2º semestre de 2025)

Pós-graduação: ECO 304310 Métodos Estocásticos em Economia e Finanças 2 (4 créditos)
Graduação: a determinar
Horário: a determinar

1. Variáveis aleatórias e esperança matemática: variáveis aleatórias e distribuições, momentos de uma variável aleatória, soma de variáveis aleatórias independentes, leis forte e fraca dos grandes números.
2. Convergência de distribuições: convergência fraca, funções características, teorema da continuidade, teorema central do limite, condições de Lindeberg e Liapunov.
3. Probabilidade condicional: decomposição de Hahn, continuidade absoluta, teorema de Radon-Nikodym, probabilidade condicional, esperança condicional.
4. Processos estocásticos: martingales em tempo discreto, submartingales, tempos de parada, desigualdades maximais de Doob, teorema do *upcrossing*, teoremas de convergência, distribuições de dimensão finita, cilindros mensuráveis, teorema de existência de Kolmogorov, movimento browniano (BM), continuidade dos caminhos amostrais do BM, não-diferenciabilidade dos caminhos amostrais do BM, propriedade forte de Markov.

Bibliografia
Billingsley, Patrick (1986): *Probability and Measure*, 3ª edição, capítulos 4, 5, 6 e 7. Mais precisamente, seções 20--22, 25--27, 32--37.

Métodos Estocásticos em Economia e Finanças, 3 (1º semestre de 2026)

Pós-graduação: ECO 304328 Métodos Estocásticos em Economia e Finanças 2 (4 créditos)
Graduação: a determinar
Horário: a determinar

1. Martingales: Tempos de parada, esperança condicional, martingales, teorema da transformada martingale, teorema do tempo de parada, submartingales e supermartingales, teorema da decomposição de Doob, desigualdades de Doob, teoremas de convergência martingale, desigualdade do *upcrossing*, integrabilidade uniforme, martingales em tempo contínuo.
2. Movimento browniano e *wavelets*: definição de movimento browniano (BM), caracterização de processos gaussianos, o espaço de Hilbert $L^2[0,1]$, representação *wavelet* do BM, leis de escalagem e inversão, continuidade dos caminhos amostrais, não-diferenciabilidade dos caminhos amostrais, BM como um martingale.
3. Integração de Itô: aproximação em H^2, isometria de Itô, definição de integral de Itô, propriedade martingale da integral de Itô, exemplos, teorema da persistência da identidade, localização por tempos de parada, a integral de Itô em L^2_{LOC}, martingales locais, teorema da representação riemanniana, a fórmula de Itô, processos de covariação quadrática.
4. Equações diferenciais estocásticas: método do *matching* de coeficientes, processos de Ornstein-Uhlenbeck, teoremas de existência e unicidade de soluções fortes, processos de difusão, a equação de difusão e métodos de solução, princípio do máximo parabólico, modelo de Black-Scholes.
5. Teoremas de representação: teorema de representação da integral estocástica, teorema da representação martingale, representação via mudança de tempo, caracterização de Lévy de um BM.
6. Teoria de Girsanov: BM com *drift*, teorema de Girsanov, variação quadrática, exponenciais martingales e condição de Novikov.
7. Fórmulas de Feynman-Kac: teorema de Feyman-Kac, fórmula de Feynman-Kac e BM's, lei do arco-seno de Lévy, aplicação do método de Feynman-Kac à EDP de Black-Scholes.

Bibliografia
Steele, J. Michael (2001): *Stochastic Calculus and Financial Applications*. Springer-Verlag, New York, 2ª edição.